24/04/2017

Αν η F' είναι ολοκλ.

$$\int_\alpha^\beta F'(x)dx = F(\beta) - F(\alpha) = \Big[F(x)\Big]_\alpha^\beta$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \left\{ \begin{aligned} &= \Big[F(x)\Big]_{x=\alpha}^{x=\beta} \\ &= F(x)\Big|_\alpha^\beta \end{aligned} \right.$$

Θεώρημα (ολοκλήρωση κατά μέρη/ολοκλήρωση κατά παράγοντες παραγοντική ολοκλήρωση)

Αν $f,g\ [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις ώστε οι f', g' να είναι ολοκληρώσιμες τότε $\forall x \in [\alpha,\beta]$

$$\int_\alpha^x f(t)g'(t)\,dt = (f(x)g(x) - f(\alpha)g(\alpha)) - \int_\alpha^x f'(t)g(t)\,dt$$

Ειδικότερα

$$\int_\alpha^\beta f(t)g'(t)\,dt = \Big[f(x)g(x)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(t)g(t)\,dt$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η fg είναι παραγωγίσιμη

$(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$

Από την υπόθεση οι f', g' είναι ολοκληρώσιμες προκύπτει ότι οι $f'g$ και fg' είναι ολοκληρ. άρα και η $(fg)'$ είναι ολοκληρ

$$\int_\alpha^x f'(t)g(t)\,dt + \int_\alpha^x f(t)g'(t)\,dt = \int_\alpha^x (fg)'(t)\,dt = f(x)g(x) - f(\alpha)g(\alpha)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει η πρώτη ισότητα ενώ για $x=\beta$ προκύπτει η δεύτερη ισότητα.

Θεώρημα (ολοκλήρωση με αντικατάσταση, 1η μορφή)
Έστω $g: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ώστε η g' να είναι ολοκληρώσιμη.
Αν $\underset{\text{διάστημα}}{I = g([\alpha,\beta])}$ και $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής

τότε $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)\, du.$ (ολοκλήρωση με αντικατάσταση)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Το I είναι διάστημα κλειστό και φραγμένο (αφού g συνεχής και $[\alpha,\beta]$ κλειστό και φραγμένο διάστημα.

Έστω $F(x) = \displaystyle\int_{g(\alpha)}^{x} f(u)\, du \quad \forall x \in I$

Από το 1ο Θεώρημα του Απειρ. Λογισμού
$F'(x) = f(x) \ \forall\ x \in I$
Επίσης
$(F\circ g)' = (F'\circ g)\cdot g'$ είναι ολοκληρώσιμη ως γινόμενο δύο ολοκληρωσίμων
$= (f\circ g)\cdot g'$
Άρα $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(g(t))\, g'(t) = \int_\alpha^\beta (F\circ g)'(t)\, dt = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$

Επίσης
$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)\, du = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} F'(u)\, du = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$$

Θεώρημα (ολοκλήρωση με αντικατάσταση, 2η μορφή)

Έστω $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη με $g'(t)\neq 0$ $\forall\, t\in[\alpha,\beta]$

Αν $I=g([\alpha,\beta])$ και $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής τότε

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))\,dt=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(t)\,(g^{-1})'(t)\,dt$$

Αποδειξη

Απο τις υποθέσεις προκύπτει ότι $g'(t)>0$ $\forall t$ ή $g'(t)<0$ $\forall t$

Άρα g γνησίως μονότονη.

Χ.β.τ.γ υποθ ότι g γν. αύξουσα

$$g:[\alpha,\beta]\to \underbrace{g[\alpha,\beta]}_{\substack{\parallel \\ I}} \leftarrow \text{διάστημα}$$

άρα ορίζεται η $g^{-1}:I\to[\alpha,\beta]$

Εφαρμόζουμε την 1η μορφή του θεωρ ολοκλ με Αντικατάσταση για την ... $f\circ g$ και g^{-1}

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(t)(g^{-1})'(t)\,dt=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)}(f\circ g)\circ(g^{-1})(t)\cdot(g^{-1})'(t)\,dt$$

$$=\int_{g^{-1}(g(\alpha))}^{g^{-1}(g(\beta))}(f\circ g)(t)\,dt=\int_\alpha^\beta f(g(t))\,dt$$

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ - εύρεση παράγουσας

Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση

Αναζητούμε F ώστε $F'(t)=f(t)$ $\forall\, t$ (κάθε άλλη παράγουσα της f θα είναι της μορφής $F+c$)

Συμβολίζουμε $\displaystyle\int f(x)\,dx=F(x)+c$

Για $a\neq -1$

$$\int x^a\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$$

Σημείωση Τι κάνουμε αν έχουμε ορισμένο ολοκλήρωμα;

$$\int_\alpha^\beta \cos x\,dx = [\sin x]_\alpha^\beta = \sin\beta - \sin\alpha$$

Η σταθερά δεν παίζει ρόλο (διότι προσθαφαιρείται) άρα μπορεί να παραλειφθεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

- $$\int \underset{f}{x}\cdot \underset{g'}{e^x}\,dx = \int x(e^x)'\,dx = xe^x - \int (x)'\cdot e^x\,dx = xe^x - \int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x = e^x(x-1)(+c)$$

ή $\int \cancel{\left(\frac{x^2}{2}\right)'} e^x\,dx$ δεν με συμφέρει

Επαλήθευση

$(xe^x - e^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' - (e^x)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x$

~o ~o ~o

$$\int x\cdot \sin x\, dx = \int x\cdot(-\cos x)'\,dx = -x\cos x - \int (x)'(-\cos x)\,dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x\ (+c)$$

Επαλήθευση.

$(-x\cos x + \sin x)' = -\cos x - x(-\sin x) + \cos x = -x\cdot(-\sin x) = x\sin x$

~o ~o ~o

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x - \cos x + c$$

Επαλήθευση

$(x\sin x - \cos x)' = \ldots\ x\cos x$

$$\int \log x\,dx = \int 1\cdot\log x\,dx = \int (x)'\log(x)\,dx = x\log x - \int x(\log x)'dx$$

$$= x\log x - \int x\frac{1}{x}dx = x\log x - x + c$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

$$\circledast\ \int \frac{1}{x}\log x\,dx = \int (\log x)'\log x\,dx = \log x\log x - \int \log x\,\frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int \frac{1}{x}\log x\,dx = (\log x)^2 \Rightarrow \int \frac{1}{x}\log x\,dx = \frac{1}{2}(\log x)^2$$

$$\int e^x \sin x\,dx =$$

1^{os} Τροπος $\int e^x\sin x\,dx = \int (e^x)'\sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cdot(\sin x)'\,dx =$

$e^x\sin x - \int e^x\cdot\cos x\,dx = e^x\cdot\sin x - \int (e^x)'\cos x\,dx = e^x\sin x - \Big(e^x\cos x$
$- \int e^x\cdot(-\sin x)\,dx\Big) \Rightarrow$

$$e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx \Rightarrow$$

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x \Rightarrow$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} \left(e^x \sin x - e^x \cos x \right)$$

2ος τρόπος

$$\int e^x \sin x \, dx = \int e^x (-\cos x)' dx = -e^x \cos x - \int (e^x)' (-\cos x) \, dx$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x (\sin x)' dx$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} (e^x \sin x - e^x \cos x)$$

<u>Σημείωση</u> Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζονται ολοκληρ. της μορφής

$$\int e^{ax} \sin(\beta x) dx \quad \text{ή} \quad \int e^{ax} \cos(\beta x) dx$$

$$I = \int (\log x)^2 dx = \int \log x \log x \, dx$$

Δείξαμε νωρίτερα ότι $\int \log x \, dx = x \log x - x$ δηλ ότι

$(x \log x - x)' = \log x$

Άρα $I = \int (x \log x - x)' \log x \, dx$

$$= (x \log x - x) \log x - \int (x \log x - x) \frac{1}{x} dx$$

$$= x (\log x)^2 - x \log x - \int (\log x - 1) dx$$

$$= x (\log x)^2 - x \log x - (x \log x - x) + x$$

$$= x (\log x)^2 - 2x \log x + 2x$$

2ος τρόπος

$$I = \int (\log x)^2 dx = \int (x)'(\log x)^2 dx = x(\log x)^2 - \int x \, 2\log x \, \frac{1}{x} dx$$

$$= x(\log x)^2 - 2(x\log x - x)$$

Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int P(x) e^{ax} dx$$

Κάνοντας παραγοντική $e^{ax} = \left(\frac{1}{a} e^{ax}\right)'$ υποβιβάζεται ο βαθμός του πολυωνύμου.

Για τον υπολογισμό θα χρειαστεί να γίνει n φορές παραγοντική ολοκλήρωση όπου n ο βαθμός του πολυων. $P(x)$

Παραδείγματα : ολοκλήρωση με αντικατάσταση

1)

$$I = \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

θέτουμε $y = \arctan x$

τότε $dy = \frac{1}{1+x^2} dx$

Το αρχικό ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται σε

$$\int y \, dy = \frac{y^2}{2} + c$$

Συνεπώς $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot (\arctan x)^2 + c$

2) $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

θέτουμε $y = \cos x$ οπότε $dy = -\sin x \, dx$

Το αρχικό ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται σε

$$\int \frac{-1}{y} dy = -\log|y| + c$$

Συνεπώς $\int \tan x \, dx = -\log|\cos x| + c$

$\int \frac{1}{x} dx = \log|x|$

δηλ $= \log x$ αν το διάστημα ολοκλ. περιέχει μόνο θετικά

είναι $= \log(-x)$ αν το διάστημα ολοκλ. περιέχει μόνο αρνητικούς αριθμούς

3) $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$ θέτουμε $y=\sqrt{x}$

οπότε $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

Τότε το αρχικό ολοκλ μετασχηματίζεται σε

$$\int 2\cdot\cos(y)\,dy = 2\cdot\sin(y) + c$$

Συνεπώς $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sin(\sqrt{x}) + c$

4) $\int_{\alpha}^{\beta} \sin^9 x \cdot \cos x\,dx$

Για $f(x)=x^9$ και $g(x)=\sin x$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$$

$$= \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)\,du = \int_{\sin\alpha}^{\sin\beta} u^9\,du = \left[\frac{u^{10}}{10}\right]_{u=\sin\alpha}^{u=\sin\beta}$$

$$= \frac{\sin^{10}\beta}{10} - \frac{\sin^{10}\alpha}{10}$$

Στην ισότητα $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)\,du$

Για να πάμε από το πρώτο στο δεύτερο μέλος αντικαθιστάμε το $g(x)$ με u κ το $g'(x)dx$ με du και αλλάζουμε τα άκρα του ολοκληρώματος.

$I = \int_{\alpha}^{\beta} \sin^9 x \cos x\,dx$ θέτω $u=\sin x$

$du = \cos x\,dx$

άρα $I = \int_{\sin\alpha}^{\sin\beta} u^9\,du = \ldots$

5) $I = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \log x} dx$

Θέτουμε $y = \log x$
$dy = \frac{1}{x} dx$

• Για $x = e \to y = \log e = 1$
• Για $x = e^2 \to y = \log e^2 = 2$

$I = \int_1^2 \frac{1}{y} dy = \left[\log y\right]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2.$

6)
$I = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x \, dx$

Θέτουμε $y = \sin x$
$dy = \cos x \, dx$

Για $x = 0$ $y = 0$
$x = \pi/2$ $y = 1$

Άρα
$I = \int_0^1 e^y dy = \left[e^y\right]_{y=0}^{y=1} = e^1 - e^0 = e - 1$

7) $\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$

Θέτουμε $y = 1 + x^2$
$dy = 2x \, dx$

οπότε $\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c$ (*)

8) $I = \int \arctan x \, dx = \int (x)' \arctan x \, dx$

$= x \cdot \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx \overset{(*)}{=} x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c$